Geometría Proyectiva

Segundo Cuatrimestre 2007

Práctica 4 - Superficies

1. (Superficie tangencial de una curva) Sea $f : (0,1) \to \mathbb{R}^3$ una curva paramétrica. Consideramos la aplicación
$$\tilde{f} : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
definida por $f(t,s) = f(t) + sf'(t)$. Demostrar que el conjunto $\mathrm{Tan}(f) = \tilde{f}((0,1) \times \mathbb{R})$ es la unión de las rectas tangentes de la curva f. Determinar los puntos regulares de $\tilde{f}$. Darle sentido y demostrar la afirmación de que $\mathrm{Tan}(f)$ es cuspidal a lo largo de la imagen de f.

2. Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental de las siguientes superficies paramétricas, en los puntos regulares.

   a) Elipsoide:
   $$r(u,v) = (a\sin(u)\cos(v), b\sin(u)\sin(v), c\cos(u));$$
   b) Paraboloide eliptico:
   $$r(u,v) = (au\cos(v), bu\sin(v), u^2);$$
   c) Paraboloide hiperbólico:
   $$r(u,v) = (au\cosh(v), bu\sinh(v), u^2);$$
   d) Hiperboloide de dos hojas:
   $$r(u,v) = (a\sinh(u)\cos(v), b\sinh(u)\sin(v), c\cosh(u)).$$

3. Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera S^2 en la parametrización dada por la proyección estereográfica.

4. Demostrar que un cono (sobre una curva plana) y un plano son localmente isométricos.

5. Las curvas coordenadas de una parametrización $r(u,v)$ forman una red de Tchebyshev si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales. Mostrar que una condición necesaria y suficiente para esto es que
$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

Probar que si las curvas coordenadas de una parametrización forman una red de Tchebyshev, entonces es posible reparametrizar el entorno coordenado de modo que los nuevos coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = 1 \qquad F = \cos(\theta) \qquad G = 1$$

donde θ es el ángulo entre las curvas coordenadas.

6. Mostrar que toda superficie de revolución puede ser reparametrizada de manera que los coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = E(v) \qquad F = 0 \qquad G = 1$$

7. Mostrar que en un punto hiperbólico, las direcciones principales bisectan las direcciones asintóticas.
Sugerencia: analizar la indicatriz de Dupin.

8. Mostrar que si una superficie S es tangente a un plano P a lo largo de una curva $C \subset S$, entonces los puntos de C son puntos planares o parabólicos de S.

9. Describir las regiones de S^2 cubiertas por la aplicación de Gauss para las siguientes superficies:

   a) Paraboloide de revolución:
   $$z = x^2 + y^2;$$

   b) Hiperboloide de revolución:
   $$x^2 + y^2 - z^2 = 1;$$

   c) Catenoide:
   $$x^2 + y^2 = \cosh^2(z).$$

10. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ las curvaturas normales en $p \in S$ en las direcciones que forman ángulos de $0, 2\pi/m, \ldots, 2(m-1)\pi/m$ respectivamente con una dirección principal. Probar que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = mH$ donde H es la curvatura media en p.
Sugerencia: considerar el teorema de Euler.

11. *a*) Si S es una superficie reglada, hallar las expresiones para su primera y segunda formas fundamentales, su curvatura de Gauss y estudiar las direcciones principales.

b) Idem para una superficie

$$S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$$

dada en forma implícita.

12. Determinar las curvas asintóticas y las líneas de curvatura de

$$S = \{(x, y, z) : z = xy\}.$$

13. En este ejercicio se analiza la pseudoesfera, una superficie relacionada con el tema de las Geometrías no-Euclideanas (ver Struik).

    a) Determinar una ecuación para la curva plana C con la propiedad de que la longitud del segmento de la recta tangente entre el punto de tangencia y la intersección con una recta $L \subset \mathbb{R}^2$ que no corta la curva es constantemente 1. Esta curva es la tractriz.

    b) Por rotación de la tractriz alrededor de la recta L se obtiene el conjunto S, denominado pseudoesfera. Determinar si S es una superficie regular y hallar una parametrización en un entorno de un punto regular. Mostrar que la curvatura de Gauss en todo punto regular de la pseudoesfera es -1.

14. Sea $[\phi(v)\cos(u), \phi(v)\sin(u), \psi(v)]$ la parametrización de una superficie de revolución con curvatura Gaussiana constante k. Para determinar ϕ y ψ se elige v de modo que $(\phi')^2 + (\psi')^2 = 1$ (es decir que v es la longitud de arco de la curva generatriz). Mostrar que ϕ satisface

$$\phi'' + k\phi = 0 \quad \text{y} \quad \psi = \int \sqrt{1 - (\phi')^2}dv.$$

Se toma $0 < u < 2\pi$ y el dominio de v de modo que la última integral está definida.

15. Todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = 1$ que intersecan perpendicularmente el plano xy están dadas por

$$\phi(v) = C\cos(v) \quad \text{y} \quad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2\sin^2(t)}dt$$

donde C es una constante. Determinar el dominio de v y hacer un gráfico de la curva cortada con el plano xz para los casos $C = 1$, $C > 1$ y $C < 1$. Observar que $C = 1$ representa S^2.

16. Todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = -1$ son de uno de los siguientes tipos:

$$\phi(v) = C\cosh(v) \quad \text{y} \quad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2\sinh^2(t)}dt;$$

$$\phi(v) = C\sinh(v) \quad \text{y} \quad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2\cosh^2(t)}dt;$$

$$\phi(v) = e^v \quad \text{y} \quad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - e^{2t}}dt.$$

Determinar el dominio de v y hacer un gráfico de cada superficie cortada con el plano xz.

17. Probar que las únicas superficies de revolución con curvatura constante $k = 0$ son el cilindro circular recto, el cono circular recto y el plano.

18. Considerar la superficie obtenida por la rotación de la curva $y = x^2$ con $-1 < x < 1$ alrededor de la recta $x = 1$. Mostrar que los puntos obtenidos por rotación del $(0, 0)$ son puntos planos de la superficie.

19. Determinar los puntos umbílicos del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Ver Struik, sec. [2.6], al final).